УДК 514.75

*О. О. Белова*

# ТЕНЗОР КРУЧЕНИЯ АНАЛОГА СВЯЗНОСТИ НЕЙФЕЛЬДА НА ГРАССМАНОПОДОБНОМ МНОГООБРАЗИИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

*В n-мерном проективном пространстве рассмотрено грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей размерности m. Введен объект кручения индуцированной связности Нейфельда в расслоении над многообразием $Gr^*(m,n)$. Показано, что данный объект образует тензор, содержащий один простейший и четыре простых подтензора.*

*This article considers the Grassmanian-like $Gr^*(m,n)$ manifold of centered m-planes in the projective space $P_n$. A torsion object of the Neifeld connection is introduced in the fibering over the manifold $Gr^*(m,n)$. It is shown that this object forms a tensor containing one elementary and four simple subtensors.*

**Ключевые слова**: проективное пространство, грассманоподобное многообразие, связность Нейфельда, тензор кручения.

**Key words**: projective space, Grassmannian-like manifold, connection, Neifeld connection, torsion tensor.



Отнесем $n$-мерное проективное пространство $P_n$ к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, \ldots = 1, \ldots, n$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I\,,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A\,,$$

причем формы Пфаффа $\omega^I$, $\omega_I$, $\omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \quad (1)$$

В пространстве $P_n$ рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ [1] центрированных $m$-мерных плоскостей $L_m^*$. Помещаем вершины $A$, $A_a$ на плоскость $L_m^*$ и фиксируем центр $A$ (индексы принимают значения: $a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$). Уравнения $\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha$ являются уравнениями грассманоподобного многообразия $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей, причем компоненты $\Lambda_\alpha^a$, $\Lambda_\alpha^{ab}$ фундаментального объекта $\Lambda$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм $\omega^\alpha$, $\omega_a^\alpha$

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0\,,\ \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0\,. \quad (2)$$

Базисные формы удовлетворяют вытекающим из (1) структурным уравнениям

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{\beta} + (\Lambda^{a}_{\beta}\omega^{\beta} + \Lambda^{ab}_{\beta}\omega^{\beta}_{b}) \wedge \omega^{\alpha}_{a}, \quad D\omega^{\alpha}_{a} = \omega^{\beta}_{b} \wedge \Omega^{\alpha b}_{a\beta} + \omega^{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{a\beta}, \tag{3}$$

где

$$\Omega^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta}, \ \Omega^{\alpha b}_{a\beta} = \delta^{b}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{b}_{a}, \ \Omega^{\alpha}_{a\beta} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{a}. \tag{4}$$

Находим внешние дифференциалы от форм (4)

$$D\Omega^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\gamma} \wedge \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} + \omega^{\gamma}_{a} \wedge \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma},$$
$$D\Omega^{\alpha b}_{a\beta} = \Omega^{\gamma b}_{c\beta} \wedge \Omega^{\alpha c}_{a\gamma} + \omega^{\gamma} \wedge \Omega^{\alpha b}_{a\beta\gamma} + \omega^{\gamma}_{c} \wedge \Omega^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, \tag{5}$$
$$D\Omega^{\alpha}_{a\beta} = \Omega^{\gamma}_{b\beta} \wedge \Omega^{\alpha b}_{a\gamma} + \Omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \Omega^{\alpha}_{a\gamma} + \omega^{\gamma}_{a} \wedge \Theta^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

где

$$\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Lambda^{a}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{a\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta}, \ \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Lambda^{ba}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{b\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta}, \ \Omega^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = -\Lambda^{b}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{a\beta} - \delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta},$$
$$\Omega^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = -\Lambda^{bc}_{\gamma}\Omega^{\alpha}_{a\beta} - \delta^{b}_{a}\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{c}_{\beta} - \delta^{c}_{a}\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{b}_{\gamma}, \ \Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma}.$$



Над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей $Gr^{*}(m, n)$ возникает главное расслоение $G^{*}(Gr^{*})$ со структурными уравнениями (3), (5), типовым слоем которого выступает группа Ли $G^{*}$, действующая в касательном пространстве к многообразию $Gr^{*}$. В главном расслоении $G^{*}(Gr^{*})$ зададим аналог связности Нейфельда [2; 3] способом Лаптева — Лумисте. Введем новые формы

$$\tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} = \Omega^{\alpha}_{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{a},$$
$$\tilde{\Omega}^{\alpha b}_{a\beta} = \Omega^{\alpha b}_{a\beta} - \Gamma^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^{\gamma} - L^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{c}, \tag{6}$$
$$\tilde{\Omega}^{\alpha}_{a\beta} = \Omega^{\alpha}_{a\beta} - \Pi^{\alpha}_{a\beta\gamma}\omega^{\gamma} - G^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^{\gamma}_{b}.$$

Связность Нейфельда в расслоении задается с помощью поля объекта связности $\{\Gamma = \{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, L^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha b}_{a\beta\gamma}, L^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, \Pi^{\alpha}_{a\beta\gamma}, G^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\}$ на базе $Gr^{*}(m, n)$ сравнениями (см. [4])

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - L^{\alpha a}_{\beta\mu}\Omega^{\mu}_{a\gamma} + \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv 0, \ \Delta L^{\alpha a}_{\beta\gamma} + \Omega^{\alpha a}_{\beta\gamma} \equiv 0, \ \Delta\Gamma^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - L^{\alpha bc}_{a\beta\mu}\Omega^{\mu}_{c\gamma} + \Omega^{\alpha b}_{a\beta\gamma} \equiv 0,$$
$$\Delta L^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} + \Omega^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0, \ \Delta\Pi^{\alpha}_{a\beta\gamma} - G^{\alpha b}_{a\beta\mu}\Omega^{\mu}_{b\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{a\mu\gamma}\Omega^{\mu}_{b\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{a\mu} \equiv 0, \tag{7}$$
$$\Delta G^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - L^{\alpha cb}_{a\mu\gamma}\Omega^{\mu}_{c\beta} + L^{\mu b}_{\beta\gamma}\Omega^{\alpha}_{a\mu} + \delta^{b}_{a}\Theta^{\alpha}_{\beta\gamma} \equiv 0.$$

Подставляя в структурные уравнения (3) базисных форм $\omega^{\alpha}$, $\omega^{\alpha}_{a}$ многообразия $Gr^{*}$ формы связности (6), приходим к следующим уравнениям:

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha}_{\beta} + S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{a} + S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}_{a} \wedge \omega^{\gamma}_{b},$$

$$D\omega^{\alpha}_{a} = \omega^{\beta}_{b} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha b}_{a\beta} + \omega^{\beta} \wedge \tilde{\Omega}^{\alpha}_{a\beta} + S^{\alpha}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} +$$

$$+ S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{b} + S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta}_{b} \wedge \omega^{\gamma}_{c},$$

где компоненты объекта $S$ выражаются по формулам

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]},\ S^{\alpha a}_{\beta\gamma}=L^{\alpha a}_{\beta\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\Lambda^{a}_{\beta},\ S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}=-\delta^{\alpha}_{[\beta}\Lambda^{\lceil a}{}^{b}_{\gamma]},$$

$$S^{\alpha}_{a\beta\gamma}=\Pi^{\alpha}_{a[\beta\gamma]},\ S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}=G^{\alpha b}_{a\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha b}_{a\gamma\beta},\ S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}=L^{\alpha}_{a}\left[{}^{bc}_{\beta\gamma}\right].$$

Здесь квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам и парам индексов.

Учитывая дифференциальные сравнения (2), (7) компонент фундаментального объекта $\Lambda$ и компонент объекта $\Gamma$, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм



$$\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma}+S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a\equiv 0,\ \Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma}+2S^{\alpha ba}_{\beta\gamma}\omega_b\equiv 0,\ \Delta S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha}_{a\beta\gamma}+S^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_b-S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega_a\equiv 0,\ \Delta S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}+2S^{\alpha cb}_{a\beta\gamma}\omega_c-S^{\alpha b}_{\beta\gamma}\omega_a\equiv 0,\ \Delta S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}-S^{\alpha cb}_{\beta\gamma}\omega_a\equiv 0.$$

**Теорема 1.** *Объект кручения $S$ индуцированной связности Нейфельда грассманоподобного многообразия $Gr^*$ центрированных плоскостей является тензором, содержащим один простейший [5] подтензор $S_0=\{S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}$ и четыре простых подтензора $S_1=\{S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}$, $S_2=\{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\}$, $S_3=\{S^{\alpha}_{\beta\gamma}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}$, $S_4=\{S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha b}_{\beta\gamma}, S^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\}$.*

**Замечание.** Подтензоры тензора кручения $S$ подчиняются следующей схеме включений:

$$\begin{array}{ccccccc} S_4 & \supset & S_1 & \supset & S_0 & \subset & S_2 \\ & & \cap & & & & \cap \\ & & S_3 & \subset & S & \supset & S_4. \end{array}$$

## Список литературы


1. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Чебоксары, 2006. С. 18—20.

2. *Норден А. П.* Проективные метрики на грассмановых многообразиях // Изв. вузов. Мат. 1981. № 11. С. 80—83.

3. *Малахальцев М. А.* О внутренней геометрии связности Нейфельда // Там же. 1986. № 2. С. 67—69.

4. *Белова О. О.* Индуцирование связности Нейфельда на грассманоподобном многообразии центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2014. № 45. С. 23—29.

5. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.


## Об авторе


Ольга Олеговна Белова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: olgaobelova@mail.ru


## About the author


Dr Olga Belova, Associate Professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: olgaobelova@mail.ru